2 Potencias y raíces

Las matemáticas siempre fueron una herramienta para resolver problemas cotidianos. ¿Cuánto mide este terreno? ¿Cómo hemos de repartirnos la cosecha? ¿Cómo utilizar las estrellas para orientarnos?

Hasta el siglo VI a.C. no aparecen los primeros matemáticos teóricos, estudiosos interesados por la investigación y el desarrollo de la ciencia, independientemente de su utilidad práctica.

El primer gran teórico de las matemáticas fue **Pitágoras.** Este griego, gran viajero, acabó asentándose en el sur de Italia, donde fundó una secta místico-científica que rendía culto a la astronomía.

Tres siglos después aparece en escena **Arquímedes,** nacido en la colonia griega de Siracusa, en Sicilia (actual Italia). Además de gran matemático, fue un extraordinario calculista. Y gracias a esto, ideó un sistema para describir números enormes. Estaba basado en la potencias de base 10, que estudiarás en esta unidad.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Potencias

Una potencia es una forma abreviada de escribir un producto de factores iguales:

$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$$

En las potencias, el factor repetido se llama **base,** y el número de veces que se repite, **exponente.**

a^b ← EXPONENTE (b), BASE (a) → Se lee: *a* elevado a *b*.

En la web

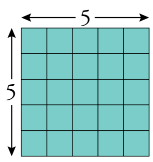
Concepto de potencia.

Ejemplos

- *Expresar cada producto en forma de potencia:*
  a) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$ → Tres elevado a cuatro o tres elevado a la cuarta.
  b) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$ → Dos elevado a cinco o dos elevado a la quinta.
- *Calcular estas potencias.*
  a) $7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$ b) $10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$

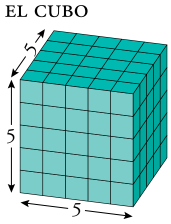
Números y geometría

EL CUADRADO



El cuadrado de 5 es $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$ (25 cuadraditos).

EL CUBO



El cubo de 5 es $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ (125 cubitos).

¿Cómo representarías geométricamente los números 3^2 y 3^3? ¿Serías capaz de idear una forma de representar también 3^4?

Dos potencias especiales: el cuadrado y el cubo

Elevar un número a la potencia de exponente 2 es **elevar al cuadrado.**

Por ejemplo: $7^2 = 7 \cdot 7 = 49$ → El cuadrado de 7 es 49.

Elevar un número a la potencia de exponente 3 es **elevar al cubo.**

Por ejemplo: $7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$ → El cubo de 7 es 343.

Las potencias en la calculadora

Las potencias, excepto en los casos más sencillos, arrojan como resultados números grandes.

Por ejemplo:

$$9^6 = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 81 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = \ldots = 531\,441$$

Estos cálculos resultan rutinarios y molestos, por lo que suelen hacerse con una calculadora.

- En las calculadoras sencillas, utilizaremos las teclas ⊗ e ⊜.

9^6 → 9 ⊗ ⊗ ⊜ ⊜ ⊜ ⊜ ⊜ → $\boxed{531441}$

(⊜ ↓ 9^2, ⊜ ↓ 9^3, ⊜ ↓ 9^4, ⊜ ↓ 9^5, ⊜ ↓ 9^6)

- En una calculadora científica, utilizaremos la tecla $\boxed{x^y}$.

9^6 → 9 $\boxed{x^y}$ 6 ⊜ → $\boxed{531441}$

Nota: Cuando el resultado es muy grande y no cabe en la pantalla, las calculadoras sencillas dan error mientras que las científicas lo dan en formatos como este:

45^8 → $\boxed{1.681512539 \times 10^{13}}$

que significa que el número decimal de la pantalla hay que multiplicarlo 13 veces por 10 (esto es, desplazar la coma decimal 13 lugares a la derecha).

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Piensa y practica

En la web Practica el concepto de potencia y algunos cálculos sencillos.

1. Expresa con una potencia.

a) $6 \cdot 6$ b) $6 \cdot 6 \cdot 6$
c) $7 \cdot 7$ d) $5 \cdot 5$
e) $10 \cdot 10 \cdot 10$ f) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$
g) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ h) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$

2. Lee estas potencias y exprésalas como producto:

a) 3^4 b) 2^7 c) 9^3
d) 15^2 e) 10^6 f) 20^4

3. Completa la tabla en tu cuaderno.

POTENCIA	BASE	EXPONENTE
2^6		
	5	3
a^4		
	m	5

4. Calcula mentalmente y ordena de mayor a menor.

a) 2^3 b) 5^2 c) 4^3
d) 20^3 e) 10^4 f) 11^2

5. Calcula con lápiz y papel.

a) 2^8 b) 3^5 c) 12^3
d) 9^4 e) 15^2 f) 85^2
g) 12^3 h) 30^4 i) 100^3

6. Obtén estas potencias con ayuda de la calculadora:

a) 11^5 b) 62^3 c) 37^4
d) 136^3 e) 101^4 f) 140^4

7. Escribe el valor de cada exponente:

a) $2^x = 64$ b) $3^y = 81$
c) $6^z = 36$ d) $8^m = 512$
e) $10^n = 10\,000$ f) $30^t = 810\,000$

8. Calcula el valor de la base, a, en cada caso:

a) $a^4 = 16$ b) $a^2 = 25$ c) $a^3 = 64$
d) $a^4 = 2\,401$ e) $a^3 = 1\,000$ f) $a^{10} = 1\,024$

9. Escribe los cuadrados de los veinte primeros números naturales.

$$\begin{array}{ccccc} 1^2 & 2^2 & 3^2 & \dots & 20^2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 4 & 9 & \dots & 400 \end{array}$$

10. Calcula expresando el proceso paso a paso.

a) $8^2 + 8$ b) $3^3 - 3^2$
c) $5^3 - 5^2 + 5$ d) $(9^2 - 7^2) + 4^2$
e) $(26 - 24)^5 - 2^4$ f) $(8^2 - 7^2)^2 - 2 \cdot 10^2 - 25$

11. ¿Verdadero o falso?

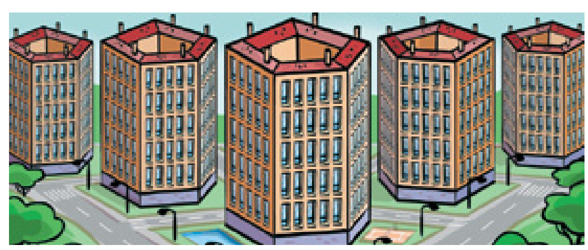
a) Elevar un número al cubo es igual que multiplicarlo por sí mismo tres veces.
b) Elevar a la cuarta es como multiplicar por cuatro.
c) El cuadrado de 10 es 20.
d) El cubo de 10 es 1 000.
e) Trece a la quinta es igual que cinco elevado a trece.

12. Álvaro dibuja tres cuadrados, uno de 5 cm de lado, otro de 12 cm de lado y el tercero de 13 cm de lado. Después colorea de rojo los dos primeros y de verde el último. ¿Qué superficie es mayor, la verde o la roja?

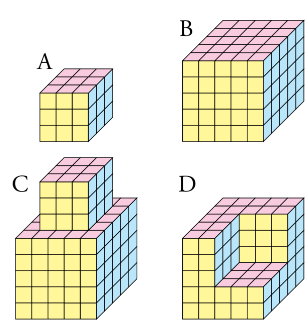
13. Recorta en papel cuadriculado dos cuadrados, uno de diez cuadrados de lado y otro de cinco.

¿Hay en el primero el doble de cuadrados que en el segundo? Explica tu respuesta.

14. Estos edificios tienen el mismo número de ventanas en todas sus caras. Expresa con una potencia de base cinco, y calcula, cuántas hay en total.



15. Expresa con potencias el número de cubos unitarios que hay en cada construcción *poli-cubo:*



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Potencias de base 10. Aplicaciones

Reflexiona

¿Qué es más cómodo de escribir y de interpretar?

1 000 000 000 000

↕

10^{12}

Ya sabes que para multiplicar por 10 basta añadir un cero. Así:

$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$ $\qquad 10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000$

$10^5 = 100\,000$ $\qquad 10^9 = 1\underbrace{000\,000\,000}_{\text{9 ceros}}$

Una potencia de base 10 es igual a la unidad seguida de tantos ceros como indica el exponente.

Expresión abreviada de números grandes

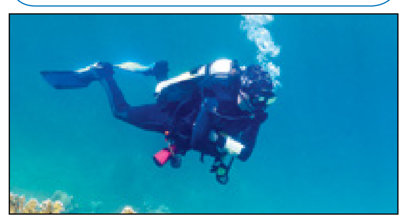
Los números terminados en ceros pueden expresarse como producto de un número por una potencia de base 10.

Por ejemplo: $400\,000 = 4 \cdot 100\,000 = 4 \cdot 10^5$

Este recurso facilita la expresión y la comprensión de números muy grandes.

Por ejemplo:

En un gramo de oxígeno hay... 37 638 383 060 000 000 000 000 átomos.



$\underbrace{37\,638\,383\,060\,000\,000\,000\,000}_{\text{21 cifras}}$

Ejemplo

Un año luz: 9 460 800 000 000 km. Observa las transformaciones que hacemos para que esta cantidad sea más fácil de leer, de escribir y de recordar:

- Redondeamos, dejando dos cifras significativas → 9 500 000 000 000
- Descomponemos en producto → $95 \cdot 100\,000\,000\,000$
- Expresamos el segundo factor como una potencia de base 10 → $95 \cdot 10^{11}$

Un año luz equivale a $95 \cdot 10^{11}$ km.

Piensa y practica

1. Escribe como potencias de base 10.

a) Un millar. b) Un millón.

c) Mil millones. d) Un billón.

2. Expresa con todas sus cifras.

a) $4 \cdot 10^5$ b) $15 \cdot 10^9$

c) $86 \cdot 10^{14}$ d) $12 \cdot 10^3$

e) $10 \cdot 10^6$ f) $894 \cdot 10^{10}$

3. Escribe el valor de x en cada caso:

a) $2\,936\,428 \approx 29 \cdot 10^x$ b) $3\,601\,294\,835 \approx 36 \cdot 10^x$

c) $19\,570\,000\,000\,000 \approx 20 \cdot 10^x$

4. Escribe en notación abreviada los datos que siguen:

a) El número de moléculas elementales en un litro de agua es 334 326 000 000 000 000 000 000.

b) Las estrellas Alfa Centauri están a unos cuarenta billones de kilómetros del Sol.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Raíz cuadrada

Calcular la raíz cuadrada es hacer la operación inversa de elevar al cuadrado.

$$b^2 = a \leftrightarrow \sqrt{a} = b$$

Ejemplos

- $4^2 = 16 \rightarrow \sqrt{16} = 4 \rightarrow$ La raíz cuadrada de 16 es 4.
- $15^2 = 225 \rightarrow \sqrt{225} = 15 \rightarrow$ La raíz cuadrada de 225 es 15.

$$\sqrt{\underbrace{a}_{\text{RADICANDO}}} = \overbrace{b}^{\text{RAÍZ}}$$ ⟶ Se lee: la raíz cuadrada de *a* es igual a *b*.

No lo olvides

Te conviene memorizar los primeros cuadrados perfectos.

$1^2 = 1$	$10^2 = 100$
$2^2 = 4$	$11^2 = 121$
$3^2 = 9$	$12^2 = 144$
$4^2 = 16$	$13^2 = 169$
$5^2 = 25$	$14^2 = 196$
$6^2 = 36$	$15^2 = 225$
$7^2 = 49$	$16^2 = 256$
$8^2 = 64$	$17^2 = \ldots$
$9^2 = 81$	$18^2 = \ldots$

Raíces exactas y raíces enteras

- Los cuadrados de los números naturales se llaman cuadrados perfectos:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 & \ldots & 8^2 & \ldots & 11^2 & \ldots & 20^2 & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{9} & \mathbf{16} & \mathbf{25} & & \mathbf{64} & & \mathbf{121} & & \mathbf{400} & \end{array}$$

  La raíz cuadrada de un cuadrado perfecto es una **raíz exacta.**

  Por ejemplo, son raíces exactas las siguientes:

$$\sqrt{9} = 3 \qquad \sqrt{121} = 11 \qquad \sqrt{400} = 20$$

- Sin embargo, para la mayoría de los números, la raíz no coincide con una cantidad exacta de unidades enteras.

  Busquemos, por ejemplo, la raíz de 40:

$$\left.\begin{array}{l} 6^2 = 36 < 40 \\ 7^2 = 49 > 40 \end{array}\right\} \rightarrow 6 < \sqrt{40} < 7 \rightarrow$$ La raíz cuadrada de 40 es un número comprendido entre 6 y 7.

  Al número natural que más se aproxima, por debajo, a la raíz, lo llamamos **raíz entera.**

$$\sqrt{40} \approx 6 \rightarrow \text{La raíz entera de 40 es 6.}$$

Ejercicios resueltos

1. ***Calcular mentalmente $\sqrt{900}$.***

$x^2 = 900 \rightarrow 30^2 = 900 \rightarrow \sqrt{900} = 30 \rightarrow$ Raíz exacta

2. ***Teniendo en cuenta los datos del cuadro, calcular $\sqrt{1440}$, $\sqrt{1444}$ y $\sqrt{1580}$.***

$37^2 = 1369$
$38^2 = 1444$
$39^2 = 1521$
$40^2 = 1600$

$\sqrt{1440} \approx 37 \rightarrow$ Raíz entera

$\sqrt{1444} = 38 \rightarrow$ Raíz exacta

$\sqrt{1580} \approx 39 \rightarrow$ Raíz entera

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Piensa y practica

1. Copia y completa, como en el ejemplo.

- $\sqrt{25} = 5 \rightarrow$ **La raíz de 25 es igual a 5.**

a) $\sqrt{49} = 7 \rightarrow \dots$

b) $\sqrt{64} = \dots \rightarrow \dots$

c) $\sqrt{81} = \dots \rightarrow \dots$

d) $\sqrt{121} = \dots \rightarrow \dots$

2. Calcula mentalmente.

a) $\sqrt{4}$ b) $\sqrt{9}$ c) $\sqrt{36}$

d) $\sqrt{400}$ e) $\sqrt{900}$ f) $\sqrt{3\,600}$

g) $\sqrt{6\,400}$ h) $\sqrt{8\,100}$ i) $\sqrt{10\,000}$

3. Calcula la raíz entera en cada caso:

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{10}$ c) $\sqrt{24}$

d) $\sqrt{32}$ e) $\sqrt{39}$ f) $\sqrt{50}$

g) $\sqrt{68}$ h) $\sqrt{92}$ i) $\sqrt{105}$

4. Escribe en tu cuaderno los cuadrados perfectos comprendidos entre 200 y 900.

15^2	16^2	17^2	18^2	…	30^2
$\boxed{225}$	$\boxed{256}$	$\boxed{289}$	$\boxed{324}$	…	$\boxed{900}$

5. Calcula, teniendo en cuenta los resultados del ejercicio anterior.

a) $\sqrt{289}$ b) $\sqrt{361}$ c) $\sqrt{484}$

d) $\sqrt{576}$ e) $\sqrt{676}$ f) $\sqrt{841}$

6. Observa el cuadro y calcula indicando si la raíz es exacta o entera.

$50^2 = 2\,500$	$51^2 = 2\,601$	$52^2 = 2\,704$
$53^2 = 2\,809$	$54^2 = 2\,916$	$55^2 = 3\,025$

a) $\sqrt{2\,550}$ b) $\sqrt{2\,601}$ c) $\sqrt{2\,725}$

d) $\sqrt{2\,815}$ e) $\sqrt{2\,916}$ f) $\sqrt{2\,929}$

Ejercicios y problemas

Cálculo de potencias

1. Calcula mentalmente.

a) 2^4 b) 6^3 c) 3^5 d) 20^4 e) 30^0

2. Copia en tu cuaderno y completa.

a) $\square^3 = 8\,000$ b) $\square^2 = 4\,900$

c) $\square^4 = 10\,000$ d) $\square^4 = 160\,000$

3. Calcula el exponente en cada caso:

a) $2^x = 256$ b) $10^x = 10\,000$

c) $7^x = 2\,401$ d) $13^x = 2\,197$

4. Calcula con lápiz y papel.

a) 5^5 b) 9^5 c) 1^{10} d) 15^3 e) 16^4

5. Obtén con la calculadora.

a) 4^{12} b) 5^{10} c) 45^3 d) 67^4 e) 99^3

6. Escribe todos los cuadrados perfectos comprendidos entre 1 000 y 1 500.

Potencias de base 10. Expresión abreviada de números grandes

7. Escribe con todas sus cifras.

a) 10^2 b) 10^6 c) 10^{10} d) 10^{12} e) 10^{16}

8. Escribe como potencia de base 10.

a) Cien. b) Cien millones.

c) Cien billones d) Cien mil billones.

9. Expresa con todas sus cifras.

a) $13 \cdot 10^7$ b) $34 \cdot 10^9$ c) $62 \cdot 10^{11}$

10. Transforma como el ejemplo.

- $\mathbf{180\,000 = 18 \cdot 10^4}$

a) 5 000 b) 1 700 000 c) 4 000 000 000

23

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Raíz cuadrada

11. De estos números, copia en tu cuaderno los que sean cuadrados perfectos y calcula su raíz cuadrada:

1 000	1 225	1 600	1 724	1 601	2 464
3 364	3 540	3 773	3 844	4 000	5 625

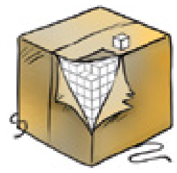
12. Calcula la raíz entera de los números que no son cuadrados perfectos de la actividad anterior.

13. Un hortelano planta lechugas en una parcela de su huerta. Las distribuye en 25 surcos y en cada surco pone 25 lechugas. ¿Cuántas plantas ha colocado?

14. Un cine de verano dispone de 625 sillas distribuidas en igual número de filas y de columnas. ¿Cuántas sillas hay en cada fila?

15. Para cubrir el suelo de una habitación cuadrangular, se han colocado 22 filas de 22 baldosas cada una. ¿Cuántas baldosas se han utilizado?

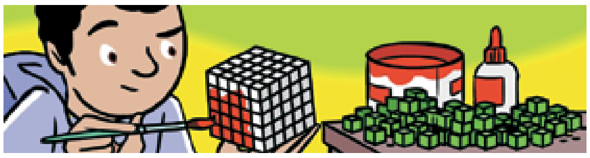
16. Marta ha construido un cubo grande, de 10 centímetros de arista juntando cubitos pequeños de madera, de 1 cm de arista. ¿Cuántos cubitos ha empleado?



17. El número de glóbulos rojos que un ser humano tiene en la sangre es veinticinco mil millones (25 000 000 000). Expresa esa cantidad en forma abreviada.

18. Una finca cuadrada tiene 900 metros cuadrados de superficie. ¿Cuántos metros lineales de alambrada habría que comprar para cercarla?

19. Observa el cubo de la ilustración formado por $5 \times 5 \times 5$ cubitos unitarios.



a) Supón que lo pintamos de rojo. ¿Cuántos cubitos unitarios habrían quedado parcialmente pintados?

b) Supón que lo queremos hacer mas grande, recubriéndolo completamente con una capa de cubitos verdes. ¿Cuántos cubitos verdes necesitaríamos?

Autoevaluación

1. Expresa en forma de potencia

a) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ b) $10 \cdot 10 \cdot 10$

c) $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$ d) $m \cdot m$

2. Calcula.

a) 2^6 b) 5^3 c) 7^2 c) 10^6

3. Copia y completa en tu cuaderno.

a) $2^{\square} = 8$ b) $\square^2 = 81$

4. Calcula:

a) 10^3 b) 10^7

5. Escribe en la notación abreviada el número 45 000 000.

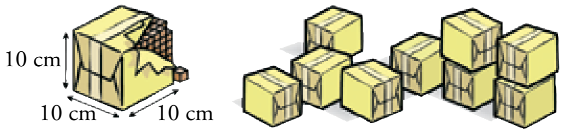
6. Copia en tu cuaderno y completa.

a) $\sqrt{36} = \square$ b) $\sqrt{400} = \square$ c) $\sqrt{10\,000} = \square$

d) $\sqrt{\square} = 3$ e) $\sqrt{\square} = 8$ f) $\sqrt{\square} = 30$

7. Calcula con lápiz y papel la raíz cuadrada entera de 2 920. Después, comprueba con la calculadora si el resultado es correcto.

8. ¿Cuántos dados de madera, de 1 cm de arista, hay en 10 paquetes como el que ves en la ilustración?



9. ¿Cuántos cuadros de moqueta, de un metro de lado, necesitas para cubrir el suelo de una nave cuadrada de 30 metros de lado? (haz un dibujo antes de resolverlo.)

10. Héctor quiere dibujar una cuadrícula, igual de ancha que de alta, que contenga 225 cuadros. ¿Cuántas filas y cuántas columnas debe poner?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....